Conceptos previos

Series infinitas.

SUCESIONES: Es un conjunto de números: a_1, a_2 ……………… a_n, dispuestos en un orden definido y que guardan una determinada ley de formación, que se expresa por una formula

Sucesión finita: numero limitado de términos: 2, 5,8…………2n-1……15.

Sucesión infinita: numero infinito de términos 1/3 , 1/5……… $\frac{1}{2n+1}$ ....1/31..

TERMINO ENESIMO: ley de formación ejemplo :2n-1 y $\frac{1}{2n+1}$ (termino general)

SERIE: es una suma indicada (suma de los términos de una sucesión)

$a_1 + a_2 +$…………………+ a_n (finitas o infinitas)

El símbolo $\sum_{n=1}^{n} a_n$ = $a_1 + a_2 +$…………………+ a_n

El símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = $a_1 + a_2 +$……………………… $\sum_{n=1}^{n} b_n$

Conjuntos acotados:

Superiormente: todo elemento b en los reales, si $A \subseteq \Re, si, \forall x \in A, x \leq b$, al existir para A a lo menos una cota superior, se dice que A esta acotado superiormente...

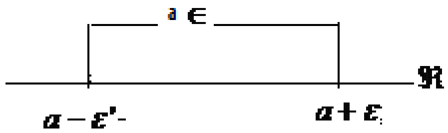
Inferiormente: Todo elemento a en los reales se denomina cota inferior de un conjunto A $\subseteq \Re, si, \forall x \in A, a \leq x$, al existir para el conjunto A, una cota inferior se dice que el conjunto A esta acotado inferiormente.

Supremo de A. la menor de todas las cotas superiores de A

Ínfimo: la mayor de todas las cotas inferiores de A.

Entorno de un número real .: conjunto de números reales x, tales que :

$a - \varepsilon' \prec x \prec a + \varepsilon; \varepsilon', \varepsilon \in \Re$



SUMATORIA: La suma de los términos de una sucesión se expresa como: $\sum_{n=1}^{n} a_1$

PROPIEDADES DE LAS SUMATORIAS:

1.- **SUMATORIA DE UNA CONSTANTE**: K$\sum_{n=1}^{n} a_1 = \sum_{n=1}^{n} a_1$ *K

2.-**SUMATORIA DE UNA SUMA O RESTA DE DOS O MÁS SUCESIONES**.

$\sum_{n=1}^{n} a_n + \sum_{n=1}^{n} b_n = \sum_{n=1}^{n} a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{n} a_n - \sum_{n=1}^{n} b_n = \sum_{n=1}^{n} a_n - b_n$

3.- **¡ importante!** : $\sum_{n=1}^{n} a_n * b_n$ =/= $\sum_{n=1}^{n} a_n * \sum_{n=1}^{n} b_n$

4.- **PROPIEDAD TELESCOPICA**: $\sum_{N=1}^{N}(A_N - A_{N+1}) = A_1 - A_{N+1}$

ALGUNAS FORMULAS CLAVES:

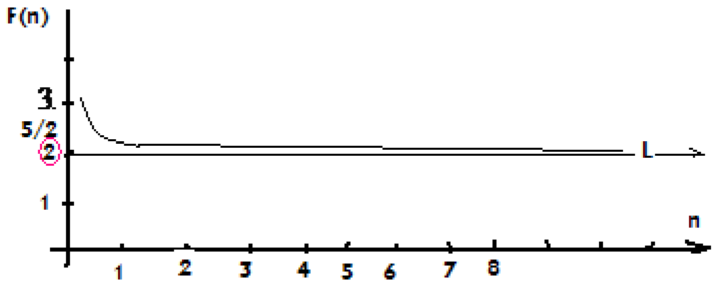
1.- $\sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\right.$ 2.- $\sum_{n=1}^{n}$ (2n-1)=n^2 3.- $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k^n} = \frac{k^2-1}{k^n(k-1)}$

4.- $\sum_{n=1}^{n}$ n=$\frac{n}{2}(n+1)$ 5.- $\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

LIMITE DE UNA SUCESION: Un numero L es el limite de una sucesión infinita: $a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, si dado un numero ε, tan pequeño como se quiera, existe un numero N, tal que $|u_n - L| \prec \varepsilon$

Si existe el límite de una sucesión, se escribe: $\lim_{n\to\infty} a_n$ =L

EJEMPLO: la sucesión $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$; Grafico:



Considerando la función: f(n) = $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$, se observa que: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$=2

Si no existe el límite de una sucesión. Se escribe: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Para calcular el limite de una función se procede a eliminar las formas indeterminadas, mediante amplificación y/o simplificación apropiada.

TEOREMAS SOBRE LÍMITES:

1.- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

2.- $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n$

3.- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n : \lim_{n\to\infty} b_n\right)$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

4.-Si $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, no existe.

5.-Si $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, puede o no existir.

6.- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p$.

Ejercicios:

1.- escribir los cuatro primeros términos de la sucesión cuyo término general se indica.

1.1.- $n/_{2n+1}$ 1.2.- $\frac{2n-1}{(n+1)^2}$ 1.3.- $\frac{2^{n-1}}{n^2+1}$ 1.4.- $\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 1.5.- $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

2.- Escribir los cuatro primeros términos y el término (n+1) de las series cuyo término enésimo es el que se indica:

2.1.- $\frac{n}{3^{n-1}}$ 2.2.- $\frac{2n+1}{4n-2}$ 2.3.- $\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+1}$

3.- escribir el término enésimo de las sucesiones siguientes:

3.1.-1/3,2/3,3/4,4/5,…….(n/(n+1))

3.2.-1/2,3/4,5/6,7/8,……..((2n-1)/2n)

3.3.- 2/3,4/5,8/7,16/9,…….

3.4.-4/3*5 ,5/4*6 , 6/5*7 , 7/6*8….

4.- Hallar el termino enésimo y el termino (n+1) de las series siguientes.

4.1.-1/3+1/5 +1/7 + 1/9………..

4.2.- 1/3 + 1/6 +1/9 +1/12………….

4.3.- 1/1! – ½! +1/3! – ¼!..............

4.4.- 3*4*5/1! +4*5*6/3! +5*6*7/5! + 6*7*8/7!

4.5.-x/1*3 + x^3/3*5 + x^5/5*7 + x^7 /7*9 +……………..

5.-Considere los conjuntos Z^- y Z^+:

5.1.-) Está acotado superiormente el conjunto Z^- ¿Cuáles son sus cotas?

5.2.-) ¿Cuáles son las cotas inferiores de Z^+?

Resp. : a) Si; 0, 1, 2, 3, 4, 5.

b) 0,-1,-2,-3,…

6.-) Dado el conjunto A= {-2, -1, 0, 1, 2, 3}

C|R

6.1.-3 cotas superiores de A Resp. : 3, 4, 5.

6.2.-3 cotas inferiores de A Resp. : -2, -3, -4

6.3.- El supremo de A

6.4.- El ínfimo de A

7.-) Representa cada uno de los siguientes entornos

7.1.- 1 < x < 4 Resp. : 1 5/2 4

7.2.- |x-3| < 1 Resp. : 2 3 4

7.3.- |x-5| < 1 Resp. : 4 5

8.-) Escribe cada uno de los siguientes entornos

En notación de desigualdad y de valor absoluto.

8.1.-Centro 2 y radio 0.5 Resp. : 1,5 < x < 2,5 ; |x-2| < 0,5

8.2.-Centro 5 y radio 3 Resp. : 2 < x < 8 ; |x-5| < 3

8.3.-Centro 0,8 y radio 0,2 Resp, : 0,6 < x < 1 ; |x-0,8| < 0,2

8.4.-Centro 4 y radio 0,6 Resp. : 3,4 < x < 4,6 ; |x-4| < 0,6

9..-) Indica tres puntos de acumulación para cada uno de los conjuntos

Siguientes:

9.1.-[-5, 1] Resp. : 0, -1,-2

9.2.-] 2, 7/3] Resp. : 7/3; 13/6; 25/12

9.3.-[-3/4, 1/8] Resp. : -3/4; -5/16; 25/12

9.4.-]-4,3[Resp. : -4, 0, -2

10.-) Escribe los primeros términos de la sucesión cuyo término general es:

10.1.- $a_n = 4+n / n$ Resp:{ 5, 3, 7/3, 2, 9/5, 5/3…}

10.2.- $a_n = (1+ 1/n)^n$ Resp: { 2, 9/4, 64/27, 625/256, 7.776/3.125…}

10.3.- $a_n = (-1)^n \; (n^2 + 1)$ Resp: {-2, 5, -10, 17, -26, 37…}

10.4.- a_n = { 2/n+2 ; si n es impar Resp: {2/3, 1, 2/5, 1, 2/7, 1…}
1; si n es par

11.-) Hallar una expresión o fórmula para el término enésimo de la sucesión:

11.1. a_n = 4, 8, 12, 16 Resp: $a_n = 4n$

11.2. a_n = 1, 4, 7, 10 Resp: $a_n = 3n-2$

11.3.- a_n = 1/2, -1/3, 1/4, -1/5 Resp: $a_n = (-1)^{n-1}\;\; 1/n+1$

12.-) Sean las sucesiones: $a_n = 2n+3$ y $b_n = 3n-1$

Encuentra las sucesiones: (a_n y b_n) y calcula los 5 primeros términos

Respuesta: 5n +2; {7, 12, 17, 22, 27…}

13.-) Sean 2 sucesiones $a_n = 4n-5$, $b_n = 2 (2n-1)$

Encuentra la sucesión (an- b_n), y calcula los 6 primeros términos.

Respuesta: 2n-3; {-1,1, 3, 5, 7, 9…}

14.-) Sean S: $a_n = 2n+1/n$ y $b_n = n-1/n+1$

Encuentre:

14.1.- a_n Resp: { 3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5…}

14.2.- b_n Resp: { 0, 1/3, ½, 3/5, 2/3 …}

14.3.- a_n+b_n Reps: { 3, 17/6, 17/6, 57/20, 43/15}

14.4.- $a_n \; b_n$ Reps: { 0, 5/6, 7/6, 27/20, 22/15…}

15.-) Dados an y bn del ejercicio anterior. Halla el término general de

15.1.- $a_n + b_n$ Resp: $3n^2 + 2n + a / n(n+1)$

15.2.- $a_n - b_n$ Resp: $n^2 + 4n +1 / n(n+1)$

16.-) Dados S: $a_n = n^2 – 1 / n$, $b_n = n/ n+n$

Encuentre el término general de :

16.1.- $a_n - b_n$ Resp: n-1

16.2.- a_n/b_n Resp: $(n-1)\, (n+1)^2 / n^2$

17.-) Indique para cada uno de las siguientes sucesiones si es creciente o decreciente.

17.1.- 2n/n+1 Resp: creciente

17.2.- n+1 /n+2 Resp: creciente

17.3.- n+2 /3 Resp: creciente

17.4.- $n-1 /2n^2-1$ Resp: decreciente

18.-) Indique para cada una de las sucesiones diferentes si es acotada o no es acotada:

18.1.- 2n + 1 / n+3 Resp: acotada

18.2.- 1/ 2n+1 Resp: acotada

18.3.- 2n-1 /n+1 Resp: acotad

18.4.- $1/n – 1/2^n$ Resp: acotada

19.-) Indica para cada uno de las sucesiones si es convergente o divergente:

19.1.- 2/n -2 Resp: convergente

19.2.- 4 + 1/n Resp: convergente

19.3.- $(-1)^{n+1}\;\; 1/n$ Resp: oscilante convergente

19.4.- $1/ n^2 + 1$ Resp: convergente

20.- sumatorias: Use formulas conocidas y encuentre la correspondiente para cada proposición :

20.1.- $\sum_{n=1}^{n} 2n$ 20.2.- $\sum_{n=1}^{n} (3n-2)$ 20.3.- $\sum_{n=1}^{n} (2n+4)$ 20.4.- $\sum_{n=1}^{n} (n^2-1)$

20.5.- $\sum_{n=1}^{n} (6n^2+4n)$

21.- calcule usando formulas desarrolladas:

21.1.- $\sum_{n=1}^{40} n$ 21.2.- $\sum_{n=1}^{30} (2n-1)$ 21.3.- $\sum_{n=1}^{63} n^2$

21.3.- $\sum_{n=1}^{80} (2n)^2$ 21.4.- $\sum_{n=1}^{70} (n^2+n)$ 21.5.- $\sum_{n=1}^{15} (5-2n^2)$

20.-Hallar los limites siguientes :

20.1.- $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+n}{5n^2-1}$ 20.2.- $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+4n+5}{7n^2-4}$ 20.3.- $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+3}{4n^3-1}$

20.4.- $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2+2}{3n+2}$ 20.5.- $\lim_{n \to \infty} \frac{(n-2)!}{n!}$ 20.6.- $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n-2}{2n+3}\right)^4$

20.7.- $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (2/5 , 3/7 , 0 , no existe , 0 , 16 , 0)

Sumatorias

Ejercicios

Calcula las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{N=1}^{7} \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum_{N=1}^{8} (3n-2)$ c) $\sum_{N=1}^{6} \frac{n}{(n+1)^2}$

2) expresa como sumatoria:

a) $1^2+2^3+3^4+\dots\dots+5^{51}$ c) $2+5+8+11+\dots\dots+44$

b) $1*1+2*3+3*5+\dots\dots+10*19$ d) $1+4+7\dots\dots+43$

3)Aplica las propiedades y calcula:

a) $\sum_{N=4}^{25} \frac{4}{22}$ b) $\sum_{N=1}^{10} \frac{7(n^3+1)}{5}$ a) $\sum_{N=11}^{20} (n^2+2)(n-2)$ b) $\sum_{N=1}^{13} (7+n)^3$

Calcule usando fórmulas desarrolladas :

a) $\sum_{N=1}^{40} n$ b) $\sum_{N=1}^{40} (2n-1)$ c) $\sum_{N=1}^{63} n^2$

5) Usa fórmulas conocidas y encuentra la correspondiente para cada porción:

a) $\sum_{N=1}^{n} (3n-2)$ b) $\sum_{N=1}^{n} (3n-2)$ c) $\sum_{N=1}^{n} (2n+4)$

d) $\sum_{N=1}^{n} (n^2-1)$ e)) $\sum_{N=1}^{n} (6n^2+4n)$

Calcule los límites:

1.- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$ 2.- $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ 3.- $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

4.- $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ 5.- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 11x+30}{x^2+2x-35}$

6. $\lim_{x \to 2} \frac{5x^2-13x+6}{4x^2-9x+2}$ 6.- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5x+4}{x^2-3x-4}$

7.- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ 8.- $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

9.- $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}-3}$ 10.- $\lim_{x \to \infty} \frac{5-2x^2}{3x+5x^2}$

11.- $x \xrightarrow{\lim} \infty \dfrac{4x+5}{2x+3}$

12.- $x \xrightarrow{\lim} 0 \dfrac{4x^2+3x+2}{x^2+2x-6}$

13.- $x \xrightarrow{\lim} 0 \dfrac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^2}$

14.- $x \xrightarrow{\lim} \infty \dfrac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7}$